| Fen-Edebiyat Fakültesi | **ARA SINAV KAĞIDI** | |
|---|---|---|
| Ad Soyadı: | Bölümü: Matematik | NOTU |
| Numarası: | Dersin Adı: Analiz III | |
| İmza: | Sınav Tarihi: 6 Kasım 2018 | |

**Her soru 25 puandır. Yanlızca dört soruyu cevaplayın. Süre 90dk.**

1. $f_n(x) = \dfrac{\sin(n^2 x)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$ olsun. (A) Dizinin $\mathbb{R}$ üzerindeki noktasal limitini belirleyin. (B) $\{f_n\}$ dizisi $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsar mı? (C) $\{f_n'\}$ dizisi $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsar mı? Gösterin.

**Çözüm:**

$$\|f_n\|_{\mathbb{R}} \le \frac{1}{n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

olduğundan sıkıştırma teoremi nedeniyle $\{f_n\}$ dizisi $\mathbb{R}$ üzerinde $f(x) = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsar. Öte yandan türev dizisi $f_n'(x) = n\cos(n^2 x)$ için, $f_n'(0) = n$ olduğundan, dizi $x = 0$ için noktasal olarak yakısamaz. Bu yüzden $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsamaz.

2. $f_n(x) = n^a x^n (1-x)^3$, $x \in [0,1]$ olsun. (A) Her $a \in \mathbb{R}$ için bu dizinin noktasal limitinin $f(x) = 0$ olduğunu ispatlayın (diziler için oran testini kullanabilirsiniz). (B) Bu dizi hangi $a$ değerleri için düzgün yakınsar?

**Çözüm:** $f_n(1) = 0$ olduğundan, $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 0$ olur. Şimdi $0 \le x < 1$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} n^a x^n (1-x)^3 = (1-x)^3 \lim_{n\to\infty} n^a x^n = 0$$

Son limitin her $a \in \mathbb{R}$ için sıfır olduğunu ders notlarından görebilirsiniz.

$$f_n'(x) = n^a \left( n x^{n-1}(1-x)^3 - 3x^n (1-x)^2 \right) = n^a x^{n-1}(1-x)^2 (n - nx - 3x)$$

$f_n'(x) = 0$ ise $x \in \{0, 1, n/n+3\}$ olur. Yani

$$\|f_n - f\| = \|f_n\| = \left| f_n\left(\frac{n}{n+3}\right) \right| = n^a \left(\frac{n}{n+3}\right)^n \left(\frac{3}{3+n}\right)^3$$

dizisinin limiti $a < 3$ için sıfır, $a = 3$ için ise sıfırdan farklı, $a > 3$ için ise limit yoktur. Yani fonksiyon dizisi sadece $a < 3$ için düzgün yakınsar.

3. $f_n(x) = e^{x/n}$ dizisinin (A) $\mathbb{R}$ üzerinde noktasal limitini belirleyin. Dizinin (B) $[0,1]$, (C) $[0,\infty)$ aralıkları üzerinde düzgün yakınsaklığını inceleyin.

**Çözüm:** $\lim_{n\to\infty} e^{x/n} = e^0 = 1$ olur. $e^{x/n}$ dizisi $x$'e göre artan bir fonksiyondur. Yani $\|f_n - f\|_{[0,1]} = e^{1/n} - 1 \to 0$ olduğundan, birinci aralık üzerinde yakınsama düzgün olur. İkinci aralıkta $\|f_n - f\|_{[0,\infty)} \ge e^{n/n} - 1 = e - 1 > 0$ olduğundan yakınsama düzgün olamaz.

4. $f_n(x) = x^n$ dizisi sırasıyla (A) $[0, 1/2]$, (B) $[0,1)$, (C) $[0,1]$ aralıkları üzerinde Dini teoreminin tüm şartlarını sağlar mı? Sağlamazsa hangi şartlarını sağlamaz? Yazınız.

**Çözüm:** Her $x \in [0,1]$ için, $f_{n+1}(x) = x^{n+1} = xx^n \leq 1x^n = f_n(x)$ olur. Yani monotonoluk şartı her üç aralıkta sağlanır. Her $f_n$ fonksiyonu her yerde süreklidir. $\{f_n\}$ dizisinin noktasal limiti ilk iki aralıkta $f(x) = 0$ fonksiyonu, son aralıkta ise $f(x) = 0$, $0 \leq x < 1$, ve $f(1) = 1$ olur. Yani noktasal limit fonksiyonu son aralıkta süreksiz, ilk iki aralıkta süreklidir. Ayrıca tanım aralığı (A) ve (C) için kapalı ve sınırlı, (B) için sınırlı ama kapalı değildir.

5. $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : A \to \mathbb{R}$, $g_n : A \to \mathbb{R}$ olsun. $A$ kümesi üzerinde, $\{f_n\}$ dizisi bir $f$ fonksiyonuna düzgün yakınsasın, $\{g_n\}$ dizisi ise bir $g$ fonksiyonuna düzgün yakınsasın. $\{2f_n - g_n\}$ dizisi $A$ üzerinde düzgün yakınsar mı? Önermenizi ispatlayın.

**Çözüm:** $\lim_{n\to\infty} 2f_n(x) - g_n(x) = 2f(x) - g(x)$ olur.

$$\left\|2f_n - g_n - (2f - g)\right\|_A \leq 2\left\|f_n - f\right\| + \left\|g_n - g\right\|$$

ve sağ taraftaki ifadelerin limitleri düzgün yakınsama nedeniyle sıfır olacağından, sol taraftaki ifadenin limiti de sıkıştırma nedeniyle sıfır olur. Yani yakınsama düzgündür.